

# Herramienta Gráfica Interactiva para Métodos de Elementos Finitos en 3 Dimensiones

*María Cecilia Rivara*  
Depto. de Ciencias de la Computación  
Universidad de Chile  
Casilla 2777, Santiago, Chile  
E-mail: mcrivara@dcc.uchile.cl

## Resumen

En este trabajo se describe una herramienta gráfica de gran utilidad en el análisis de problemas tridimensionales mediante el método de elementos finitos. Esta permite la modificación interactiva de mallas de tetraedros en estaciones de trabajo con ambiente multiventanas.

Con el fin de interactuar con la malla de tetraedros, el usuario dispone de tres vistas planas ortográficas del objeto y una vista tridimensional paralela oblicua de éste, sobre las cuales manipula y superpone a voluntad un patrón de refinamiento. Una vez ubicado y dimensionado adecuadamente el patrón de refinamiento, el usuario utiliza un algoritmo versátil y confiable para refinar todos los tetraedros que intersectan el patrón de refinamiento manteniendo la suavidad y buenas propiedades geométricas de las mallas.

## 1 Introducción

Un área de aplicación de gran impacto de las técnicas CAD es el análisis de problemas de ingeniería mediante el uso de métodos de elementos finitos. Aunque estas técnicas se han usado extensamente en los últimos 15 años, aun hoy se asume que un ser humano tomará las decisiones y analizará los resultados de cada etapa del proceso [3].

Sin embargo, desde que Babuska y Rheinboldt describieron en 1977 [1] las características deseables de los sistemas de elementos finitos totalmente automáticos, la aplicación de técnicas adaptivas en esta área ha suscitado gran interés. En [5], la autora de este artículo ha discutido en detalle, las características del software adaptivo de elementos finitos que permitiría explotar adecuadamente el potencial del método de elementos finitos, reduciendo tanto el riesgo de mala utilización de éste, como el trabajo humano involucrado en la definición de la discretización.

El diseño de software adaptivo se basa en la construcción de la malla en forma dinámica a través del proceso. Esto depende en forma crítica de la disponibilidad de algoritmos flexibles que permitan modificar la malla, ya sea por refinamiento y/o por desrefinamiento, si el error estimado sobre la discretización en curso no es aceptable. Este trabajo se realiza en forma automática u adaptiva si el software incluye estimadores confiables del error asociados a la ecuación diferencial en consideración.

Sin embargo, a pesar del extenso trabajo realizado en esta dirección en los últimos 10 años, la mayor parte del trabajo adaptivo ha sido de interés académico y realizado dentro de las universidades. Poco se ha incluido en paquetes comerciales [3]. Menos trabajo aún se ha hecho en este sentido en tres dimensiones.

La misma estructura de resolución puede utilizarse en forma interactiva si el usuario dispone de herramientas gráficas y algoritmos que le permitan fácilmente comparar las soluciones obtenidas sobre dos mallas distintas, donde la malla más fina se ha obtenido por refinamiento de la otra. El usuario dispondría así de una herramienta que le permitiera asegurar que el análisis realizado tiene un grado aceptable de confiabilidad.

En este trabajo se discute una herramienta que combina un algoritmo de refinamiento confiable y versátil para malla de tetraedros y un criterio interactivo basado en el concepto de patrón de refinamiento controlado por el usuario.

## 2 Diseño Básico del Software Adaptivo o Interactivo

El diseño de software adaptivo/interactivo para análisis de elementos finitos, se centra en el manejo y modificación de la malla a través del proceso, siguiendo el siguiente esquema general

0. Construcción de la malla inicial.
  1. Cálculo de la solución de elementos finitos.
  2. Evaluación de la malla (solución de elementos finitos).
  3. Mientras la malla no es aceptable, se realiza lo siguiente:
    - 3.1. Definición de la submalla de refinamiento
    - 3.2. Refinamiento de la malla
    - 3.3. Cálculo de la solución de elementos finitos.
    - 3.4. Evaluación de la malla (solución de elementos finitos).

La solución numérica obtenida en cada paso depende de la calidad de la malla construída para discretizar el problema continuo. La evaluación de la malla se realiza en la práctica analizando dicha solución numérica.

En el contexto adaptivo, el proceso completo se realiza en forma totalmente automática usando un estimador confiable del error en los pasos 2 y 3.4 y un criterio que permita decidir qué elementos deberían refinarse para obtener una mejor solución (submalla de refinamiento) [1,5].

En el contexto interactivo en cambio, los pasos 2 y 3.4 dependen del usuario y de las herramientas de que disponga para ayudarlo a definir la submalla de refinamiento.

En este trabajo se describe una herramienta gráfica que permite el manejo interactivo de mallas de tetraedros, que puede integrarse fácilmente con técnicas adaptivas en una etapa posterior. Esta se basa en la combinación de un algoritmo de refinamiento en 3D basado en la bisección de tetraedros por el lado más largo [7] (que ha mostrado ser muy efectivo en la práctica), y el concepto de patrón de refinamiento [4].

El patrón de refinamiento es una primitiva gráfica tridimensional, que el usuario puede manipular en ubicación y en tamaño, de modo tal que su posición final con respecto al sólido, define la submalla de refinamiento. La submalla de refinamiento está constituída así por el conjunto de tetraedros de la malla que intersectan el patrón de refinamiento.

El algoritmo de refinamiento trabaja en forma local sobre esta submalla de refinamiento y asegura que la malla final construída es conforme (la intersección de tetraedros vecinos es un vértice, una arista o una cara común).

Cada una de las mallas generadas en el proceso, puede usarse a su vez como malla de entrada para continuar con nuevos refinamientos.

### 3 El Algoritmo de Refinamiento

En [7] se discute el algoritmo en tres dimensiones que hemos utilizado para modificar por refinamiento mallas de tetraedros, basado en las siguientes ideas y definiciones.

Cualquier tetraedro no degenerado  $T$  se define por sus 4 vértices no coplanares. La bisección generalizada de  $T$  es la división de éste en dos tetraedros mediante un plano determinado por el punto medio de la arista más larga de  $T$  y los dos vértices restantes.

Una malla de tetraedros  $\tau$  es conforme si la intersección de dos tetraedros vecinos es un vértice, arista o cara común. Observe que  $\tau$  es una malla no conforme si en general existe al menos un punto no conforme  $P$  que es simultáneamente punto interior del lado de al menos un tetraedro y vértice de al menos dos tetraedros.

Sea  $\tau$  una malla conforme de tetraedros y  $T$  un tetraedro a ser refinado localmente en  $\tau$ . El algoritmo que hemos utilizado realiza el mínimo número de bisecciones generalizadas recursivas sobre  $T$  y sus vecinos para obtener una malla conforme.

Para describir el algoritmo en forma precisa y simple, definiremos el conjunto vecino de un tetraedro  $T$  como el conjunto de tetraedros adyacentes que comparten con  $T$  su lado más largo. Esta definición nos permite identificar todas los tetraedros que deberían refinarse (para asegurar conformidad) si se realiza una bisección generalizada de  $T$ .

El algoritmo se describe así mediante el siguiente procedimiento recursivo:

```
Refinamiento-de-tetraedro ( $T, \tau$ )
  Realice una bisección generalizada de  $T$ 
    (Sea  $P$  el nuevo vértice generado)
  Mientras  $P$  es no conforme realice lo siguiente
    Encuentre el conjunto vecino  $N_T$  de  $T$ 
    para cada  $T^* \in N_0$  realice lo siguiente
      Refinamiento-de-tetraedro ( $T^*, \tau$ )
```

Aunque no se ha demostrado matemáticamente que el algoritmo anterior preserva la forma de los elementos, en el sentido que los elementos no degeneran cuando el proceso prosigue hasta el infinito, como se ha demostrado para su análogo bidimensional [6], en [7] se ha incluido experimentación numérica que muestra que el algoritmo 3D tiene en la práctica el mismo tipo de comportamiento.

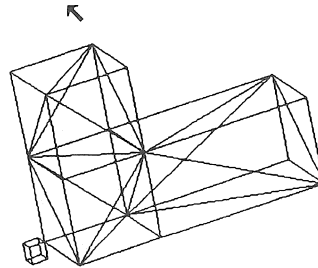
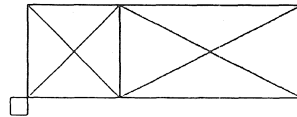
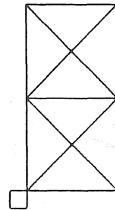
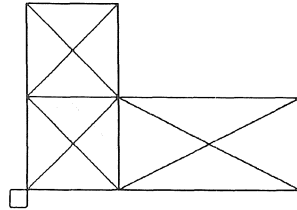
### 4 Patrón de Refinamiento y Refinamiento Interactivo

Con el fin de obtener una herramienta interactiva efectiva para refinamiento de mallas cualesquiera en 3D, hemos combinado técnicas de visualización de CAD y la idea de patrón de refinamiento.

El patrón de refinamiento es un sólido standard (en este caso una caja) que el usuario puede mover, agrandar o reducir utilizando un dispositivo bidimensional (mouse).

Una vez que el usuario decide realizar refinamiento interactivo, un menú le permite desplegar cuatro vistas de la malla en curso: tres proyecciones planas ortográficas y una vista tridimensional paralela oblicua. Sobre estas vistas se superponen las vistas correspondientes al patrón de refinamiento. Mediante estas vistas y el "mouse", el usuario puede manipular y ubicar el patrón de refinamiento, de modo que su dimensión y posición final define la submalla de refinamiento como el conjunto de tetraedros que lo intersectan.

Las figuras 1 y 2 ilustran las ideas anteriores para una malla gruesa inicial. la Figura 1 muestra la posición y tamaño del patrón de refinamiento inicial. En la Figura 2 éste ha sido manipulado y posicionado sobre la malla, definiendo una submalla de refinamiento. La Figura 3 muestra una vista tridimensional de la malla generada al aplicar una iteración del algoritmo de refinamiento.



Working directory : /cristian/.men/view  
File name : ele

Rotate X :  
[21] 0  360

Rotate Y :  
[10] 0  360

Rotate Z :  
[10] 0  360

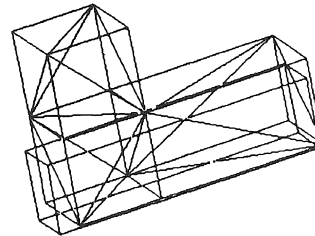
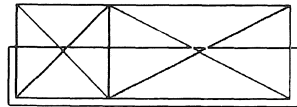
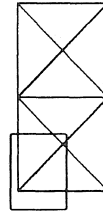
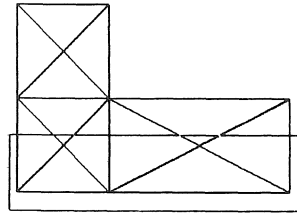
Scale Mesh :  
[157] 50  400

Display Options :

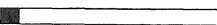
- Hidden Lines
- Drag on Rotation


Nodes : 16  
Elements : 15


FIGURA 1



Working directory : </crislian/.mem/view  
File name : ele

Rotate X :  
[21] 0  360

Rotate Y :  
[18] 0  360

Rotate Z :  
[18] 0  360

Scale Mesh :  
[157] 50  400

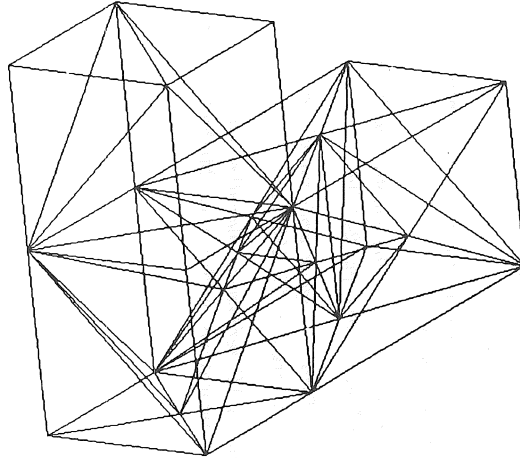
Display Options :

- Hidden Lines
- Drag on Rotation

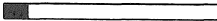
Nodes : 16  
Elements : 15

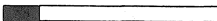
1020

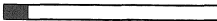
FIGURA 2



Working directory : /cristian/.mem/view  
File name : ele

Rotate X :  
[30] 0  360

Rotate Y :  
[50] 0  360

Rotate Z :  
[30] 0  360

Scale Mesh :  
[167] 50  400

Display Options :

Hidden Lines

Drag on Rotation

Nodes : 24  
Elements : 46

FIGURA 3

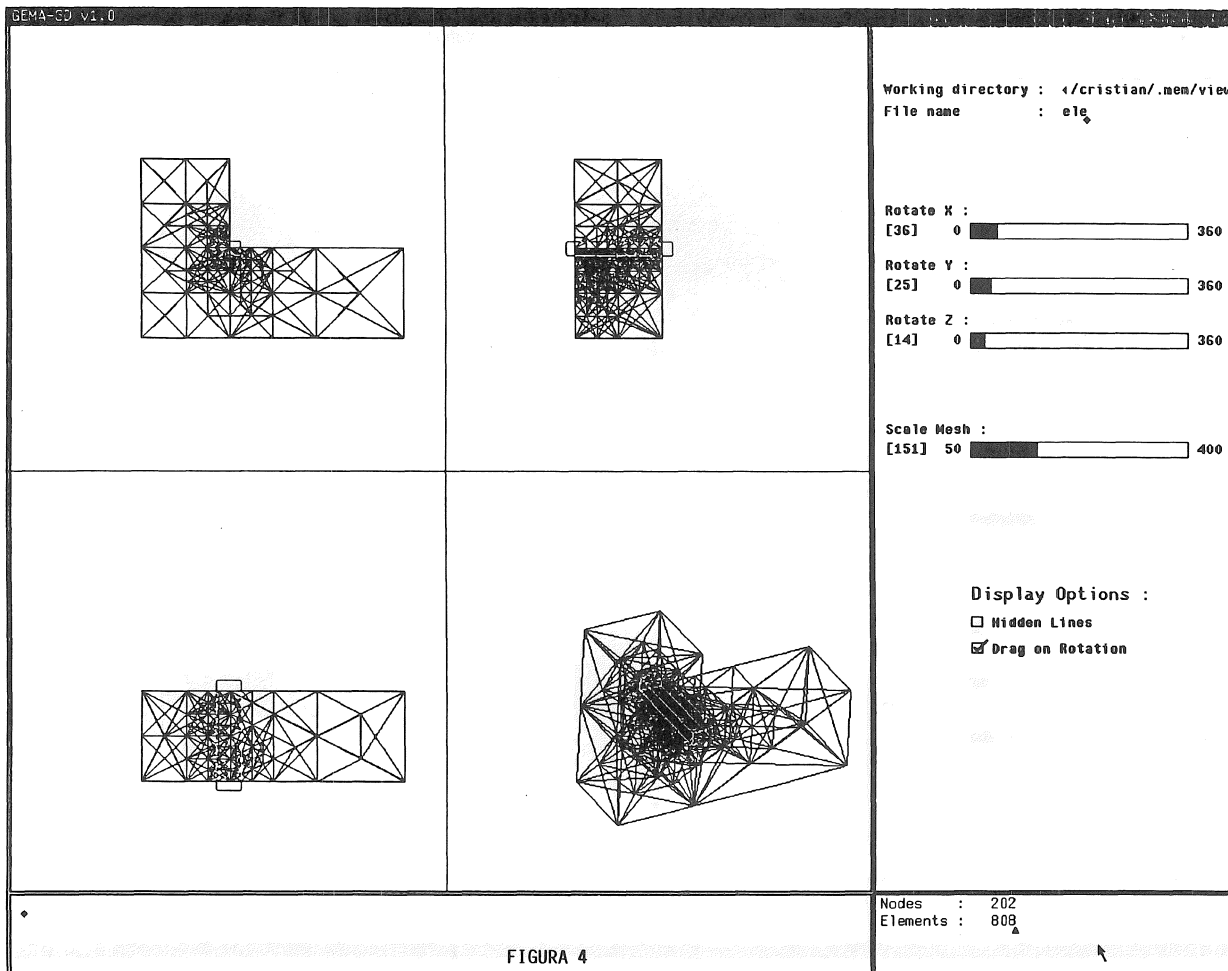
La Figura 4 muestra una malla generada después de 9 pasos de refinamiento iterativo usando el mismo patrón de refinamiento indicado en la figura. La Figura 5 muestra un conjunto de estadísticas calculadas para cada una de las mallas construídas durante las 9 iteraciones. Por ejemplo, para la malla de la Figura 5 los ángulos planos asociados al peor ángulo sólido generado son  $35.26^\circ$ ,  $25.35^\circ$  and  $18.43^\circ$ . Además esta malla tiene sólo un 2.65% de elementos cuyo ángulo sólido mínimo es menor que  $10^\circ$ . Observe también que a partir de la iteración 4 se ha mantenido constante el peor ángulo sólido construído. Más informaciones acerca de estas estadísticas y sobre la experimentación numérica realizada con estos algoritmos puede encontrarse en [7].

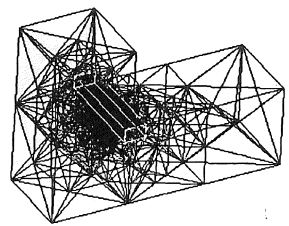
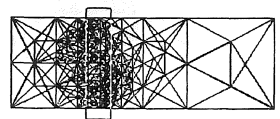
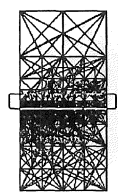
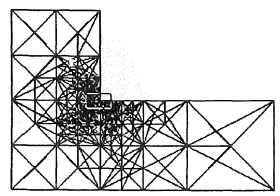
## Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto FONDECYT 91-1220 y el Proyecto DTI 2847/902F.

## Referencias

1. Babuska, I. and W.C. Rheinboldt. *Computational aspects of finite element method*. In *Mathematical Software III*. J.R. Rice, Ed. Academic Press, 1977, pp. 225-255.
2. Cavendish, J.C., D.A. Field and W.H. Frey. *Automatic mesh generation: a finite element computer aided geometric design interface*. MAFELAP 1984, J.R. Whiteman(Ed.), Academic Press, 1985, pp. 83-96.
3. Hinton, E., M.A. Crisfield and D. Hitchings. *Research group seminar on adaptive meshing*. Benchmark, Newsletter of the National Agency for Finite Element Methods and Standards, 1990, pp. 9-12.
4. Levin, C., *Generación interactiva de mallas tridimensionales para métodos de elementos finitos*. Depto. Ciencias de la Computación, 1991.
5. Rivara, M.C. *Design and data structure of fully adaptive, multigrid, finite-element software*. ACM Trans. Math. Software Vol.10, 1984, pp. 242-264.
6. Rivara, M.C. *Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques*. Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.20, 1984, pp. 745-765.
7. Rivara, M.C. and C. Levin. *A 3D refinement algorithm suitable for adaptive and multigrid techniques*. To appear Communications on Numerical Methods in Engineering, 1992.





Working directory : </cristian/.nem/view  
File name : ele

Rotate X :  
[36] 0  360

Rotate Y :  
[25] 0  360

Rotate Z :  
[14] 0  360

Scale Mesh :  
[151] 50  400

Display Options :

- Hidden Lines
- Drag on Rotation

FIGURA 5

Nodes : 386  
Elements : 1699